



Funded by  
the European Union

# Protok fluida i Bernulijeva jednačina

Mermina Gadara  
Univerzitet Džemal Bijedić

Primjenjena Mehanika fluida/ 08.04.2025

"Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them."

**Partnership for Promotion and Popularization of Electrical Mobility through  
Transformation and Modernization of WB HEIs Study Programs/PELMOB**

Call: ERASMUS-EDU-2022-CBHE-STRAND-2

Project Number: 101082860



Količina fluida koja teče u sistemu po jedinici vremena može biti izražena preko sljedeća tri različita izraza:

- ✓ Q-zapreminski protok
- ✓ W-težinski protok
- ✓ M-maseni protok

- Zampreminski protok:

$$Q = Av$$

$$Q = Av = \text{m}^2 \times \text{m/s} = \text{m}^3/\text{s}$$

- Težinski protok:

$$W = \gamma Q$$

$$W = \gamma Q = \text{N/m}^3 \times \text{m}^3/\text{s} = \text{N/s}$$

- Maseni protok:

$$M = \rho Q$$

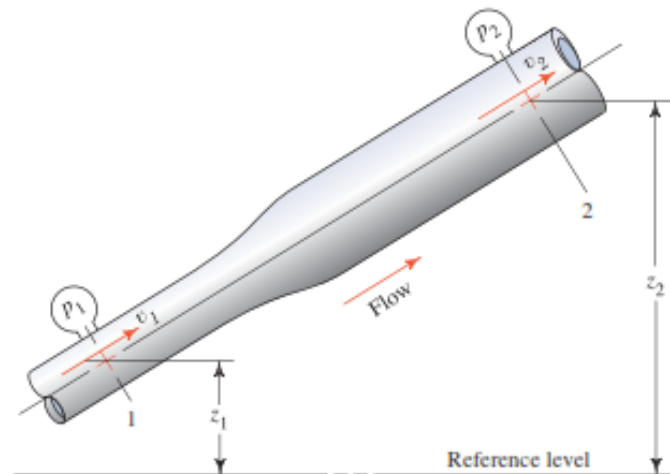
$$M = \rho Q = \text{kg/m}^3 \times \text{m}^3/\text{s} = \text{kg/s}$$

TABLE 6.1 Flow rates—Definitions and units

Symbol	Name	Definition	SI Units	U.S. Customary System Units
$Q$	Volume flow rate	$Q = Av$	$\text{m}^3/\text{s}$	$\text{ft}^3/\text{s}$
$W$	Weight flow rate	$W = \gamma Q$ $W = \gamma Av$	$\text{N/s}$	$\text{lb/s}$
$M$	Mass flow rate	$M = \rho Q$ $M = \rho Av$	$\text{kg/s}$	$\text{slugs/s}$

# Jednačina kontinuiteta

- Metoda izračunavanja protoka fluida u zatvorenom sistemu cijevi zavisi o principu kontinuiteta.



- Količina fluida koja prođe kroz bilo koji presjek u bilo kom trenutku vremena je konstantna.

- Može se izraziti preko:

- ✓ masenog protoka:

$$M_1 = M_2$$

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

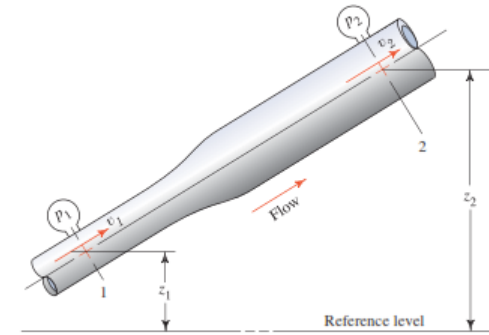
- ✓ zapreminskog protoka:

$$Q_1 = Q_2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

In Fig. 6.2 the inside diameters of the pipe at sections 1 and 2 are 50 mm and 100 mm, respectively. Water at 70°C is flowing with an average velocity of 8.0 m/s at section 1. Calculate the following:

- Velocity at section 2
- Volume flow rate
- Weight flow rate
- Mass flow rate



$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = v_1 \left( \frac{A_1}{A_2} \right)$$

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi (50 \text{ mm})^2}{4} = 1963 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi (100 \text{ mm})^2}{4} = 7854 \text{ mm}^2$$

$$v_2 = v_1 \left( \frac{A_1}{A_2} \right) = \frac{8.0 \text{ m}}{\text{s}} \times \frac{1963 \text{ mm}^2}{7854 \text{ mm}^2} = 2.0 \text{ m/s}$$

$$Q = A_1 v_1 = 1963 \text{ mm}^2 \times \frac{8.0 \text{ m}}{\text{s}} \times \frac{1 \text{ m}^2}{(10^3 \text{ mm})^2} = 0.0157 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$W = \gamma Q = \frac{9.59 \text{ kN}}{\text{m}^3} \times \frac{0.0157 \text{ m}^3}{\text{s}} = 0.151 \text{ kN/s}$$

$$M = \rho Q = \frac{978 \text{ kg}}{\text{m}^3} \times \frac{0.0157 \text{ m}^3}{\text{s}} = 15.36 \text{ kg/s}$$

# Komercijalno dostupne cijevi

- Čelične cijevi
  - Cjevovodi opće namjene često su izrađeni od čelika.
  - Standardne veličine označene su nominalnom veličinom cijevi (NPS) i brojem rasporeda (Schedule Number). Nominalna veličina je samo standardna oznaka i ne koristi se za izračune. Raspon brojeva rasporeda je od 10 do 160, s tim da veći brojevi ukazuju na veću debljinu stijenke.
  - Najcjelovitija dostupna serija čeličnih cijevi jesu Rasporedi 40 i 80 (Schedule 40 i Schedule 80)..

- **Nazivne veličine cijevi (NPS) u metričkim jedinicama**
- ✓ Zbog velikog iskustva s proizvodnjom standardnih cijevi prema standardu NPS veličina i raspored brojeva, najčešće se koriste kada je sistem cijevi specificiran u metričkim jedinicama.
- ✓ International Standards Organization (ISO) je razvio način označavanja DN.
- ✓ Simbol DN koristi se za označavanje nominalni prečnika u mm. Dodatak F prikazuje oznaku DN uz oznaku NPS.
- ✓ Na primjer, čelična cijev DN 50 mm po rasporedu 40 ima iste dimenzije kao i 2-in čelična cijev Schedule 40.

## DIMENSIONS OF STEEL PIPE

**TABLE F.1** Schedule 40

Nominal Pipe Size		Outside Diameter		Wall Thickness		Inside Diameter			Flow Area	
NPS (in)	DN (mm)	(in)	(mm)	(in)	(mm)	(in)	(ft)	(mm)	(ft <sup>2</sup> )	(m <sup>2</sup> )
½	6	0.405	10.3	0.068	1.73	0.269	0.0224	6.8	0.000 394	3.660 × 10 <sup>-5</sup>
¾	8	0.540	13.7	0.088	2.24	0.364	0.0303	9.2	0.000 723	6.717 × 10 <sup>-5</sup>
¾	10	0.675	17.1	0.091	2.31	0.493	0.0411	12.5	0.001 33	1.236 × 10 <sup>-4</sup>
½	15	0.840	21.3	0.109	2.77	0.622	0.0518	15.8	0.002 11	1.960 × 10 <sup>-4</sup>
¾	20	1.050	26.7	0.113	2.87	0.824	0.0687	20.9	0.003 70	3.437 × 10 <sup>-4</sup>
1	25	1.315	33.4	0.133	3.38	1.049	0.0874	26.6	0.006 00	5.574 × 10 <sup>-4</sup>
1¼	32	1.660	42.2	0.140	3.56	1.380	0.1150	35.1	0.010 39	9.653 × 10 <sup>-4</sup>
1½	40	1.900	48.3	0.145	3.68	1.610	0.1342	40.9	0.014 14	1.314 × 10 <sup>-3</sup>
2	50	2.375	60.3	0.154	3.91	2.067	0.1723	52.5	0.023 33	2.168 × 10 <sup>-3</sup>
2½	65	2.875	73.0	0.203	5.16	2.469	0.2058	62.7	0.033 26	3.090 × 10 <sup>-3</sup>
3	80	3.500	88.9	0.216	5.49	3.068	0.2557	77.9	0.051 32	4.768 × 10 <sup>-3</sup>
3½	90	4.000	101.6	0.226	5.74	3.548	0.2957	90.1	0.068 68	6.381 × 10 <sup>-3</sup>
4	100	4.500	114.3	0.237	6.02	4.026	0.3355	102.3	0.088 40	8.213 × 10 <sup>-3</sup>
5	125	5.563	141.3	0.258	6.55	5.047	0.4206	128.2	0.139 0	1.291 × 10 <sup>-2</sup>
6	150	6.625	168.3	0.280	7.11	6.065	0.5054	154.1	0.200 6	1.864 × 10 <sup>-2</sup>
8	200	8.625	219.1	0.322	8.18	7.981	0.6651	202.7	0.347 2	3.226 × 10 <sup>-2</sup>
10	250	10.750	273.1	0.365	9.27	10.020	0.8350	254.5	0.547 9	5.090 × 10 <sup>-2</sup>
12	300	12.750	323.9	0.406	10.31	11.938	0.9948	303.2	0.777 1	7.219 × 10 <sup>-2</sup>
14	350	14.000	355.6	0.437	11.10	13.126	1.094	333.4	0.939 6	8.729 × 10 <sup>-2</sup>
16	400	16.000	406.4	0.500	12.70	15.000	1.250	381.0	1.227	0.1140
18	450	18.000	457.2	0.562	14.27	16.876	1.406	428.7	1.553	0.1443
20	500	20.000	508.0	0.593	15.06	18.814	1.568	477.9	1.931	0.1794
24	600	24.000	609.6	0.687	17.45	22.626	1.886	574.7	2.792	0.2594

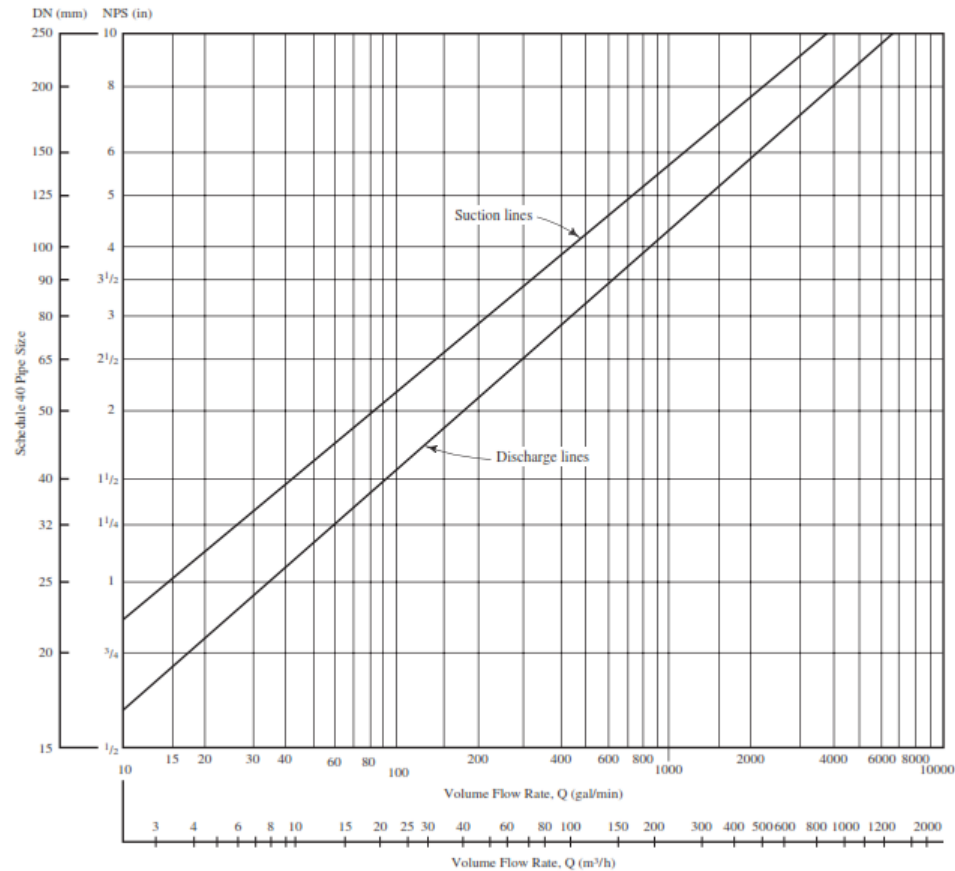
**TABLE F.2** Schedule 80

Nominal Pipe Size		Outside Diameter		Wall Thickness		Inside Diameter			Flow Area	
NPS (in)	DN (mm)	(in)	(mm)	(in)	(mm)	(in)	(ft)	(mm)	(ft <sup>2</sup> )	(m <sup>2</sup> )
½	6	0.405	10.3	0.095	2.41	0.215	0.017 92	5.5	0.000 253	2.350 × 10 <sup>-5</sup>
¾	8	0.540	13.7	0.119	3.02	0.302	0.025 17	7.7	0.000 497	4.617 × 10 <sup>-5</sup>
¾	10	0.675	17.1	0.126	3.20	0.423	0.035 25	10.7	0.000 976	9.067 × 10 <sup>-5</sup>
½	15	0.840	21.3	0.147	3.73	0.546	0.045 50	13.9	0.001 625	1.510 × 10 <sup>-4</sup>
¾	20	1.050	26.7	0.154	3.91	0.742	0.061 83	18.8	0.003 00	2.787 × 10 <sup>-4</sup>
1	25	1.315	33.4	0.179	4.55	0.957	0.079 75	24.3	0.004 99	4.636 × 10 <sup>-4</sup>
1¼	32	1.660	42.2	0.191	4.85	1.278	0.106 5	32.5	0.008 91	8.278 × 10 <sup>-4</sup>
1½	40	1.900	48.3	0.200	5.08	1.500	0.125 0	38.1	0.012 27	1.140 × 10 <sup>-3</sup>
2	50	2.375	60.3	0.218	5.54	1.939	0.161 6	49.3	0.020 51	1.905 × 10 <sup>-3</sup>
2½	65	2.875	73.0	0.276	7.01	2.323	0.193 6	59.0	0.029 44	2.735 × 10 <sup>-3</sup>
3	80	3.500	88.9	0.300	7.62	2.900	0.241 7	73.7	0.045 90	4.264 × 10 <sup>-3</sup>
3½	90	4.000	101.6	0.318	8.08	3.364	0.280 3	85.4	0.061 74	5.736 × 10 <sup>-3</sup>
4	100	4.500	114.3	0.337	8.56	3.826	0.318 8	97.2	0.079 86	7.419 × 10 <sup>-3</sup>
5	125	5.563	141.3	0.375	9.53	4.813	0.401 1	122.3	0.126 3	1.173 × 10 <sup>-2</sup>
6	150	6.625	168.3	0.432	10.97	5.761	0.480 1	146.3	0.181 0	1.682 × 10 <sup>-2</sup>
8	200	8.625	219.1	0.500	12.70	7.625	0.635 4	193.7	0.317 4	2.949 × 10 <sup>-2</sup>
10	250	10.750	273.1	0.593	15.06	9.564	0.797 0	242.9	0.498 6	4.632 × 10 <sup>-2</sup>
12	300	12.750	323.9	0.687	17.45	11.376	0.948 0	289.0	0.705 6	6.555 × 10 <sup>-2</sup>
14	350	14.000	355.6	0.750	19.05	12.500	1.042	317.5	0.852 1	7.916 × 10 <sup>-2</sup>
16	400	16.000	406.4	0.842	21.39	14.314	1.193	363.6	1.117	0.1038
18	450	18.000	457.2	0.937	23.80	16.126	1.344	409.6	1.418	0.1317
20	500	20.000	508.0	1.031	26.19	17.938	1.495	455.6	1.755	0.1630
24	600	24.000	609.6	1.218	30.94	21.564	1.797	547.7	2.535	0.2344

- Standardne čelične cijevi koriste se u tekućim elektroenergetskim sistemima, kondenzatorima, izmjenjivačima toplote, motornim sistemima za gorivo, i industrijskim tekućim procesnim sistemima.
- Standardna inč veličina je određena vanjskim prečnikom i debljinom stijenke u inčima.
- Standardne veličine od 1/8 u do 2-in su date u Dodatku.

## Preporučene brzine i veličine protoka za cijevi

- Mnogi faktori utiču na odabir zadovoljavajuće brzine i protoka u fluidnim sistemima. Neki od najvažnijih su: vrsta fluida, dužina protočnog sistema, vrsta cijevi, pad pritiska koji se može tolerisati, uređaji (npr. pumpe, ventili itd.) koji mogu biti spojeni na cijev, temperaturi, pritisku i buci.
- Prema jednačini kontinuiteta poznato je da se brzina protoka povećava kako površina se smanjuje. Stoga manje cijevi uzrokuju veće brzine, a veće cijevi pružit će niže brzine.
- Kasnije će se objasniti da gubici energije i odgovarajući pad pritiska dramatično raste kako se brzina protoka povećava. Iz tog razloga poželjno je zadržati brzine male.
- Budući da su veće cijevi skuplje, potrebna su neka ograničenja.



- Slika pruža vrlo grube smjernice za specificiranje veličine cijevi u zavisnosti od zapreminskog protoka za tipične sisteme za distribuciju pumpane tekućine. Podaci su sažeti iz analize nazivnog volumenskog protoka za mnoge komercijalno dostupne centrifugalne pumpe koje rade blizu njihove najbolje tačke efikasnosti i posmatranja usisne i potisne linije.
- Općenito, brzina protoka je manja u usisnim vodovima koji osiguravaju protok u pumpu kako bi se osiguralo pravilno punjenje usisnog ulaza.
- Manja brzina također pomaže u ograničavanju energije gubici u usisnom vodu, održavajući pritisak na ulasku relativno visokim kako bi se osiguralo da čista tekućina uđe u pumpu.
- Niži pritisci mogu prouzročiti štetno stanje pod nazivom kavitacija koja rezultira pretjeranom bukom, erozijom pumpe i površine rotora.

Rezultirajući protok iz preporučenih veličina cijevi prema prethodnoj slici je općenito manji za manje cijevi i veći za veće cijevi, kao što je prikazaju sljedeći podaci.

Volume Flow Rate		Suction Line			Discharge Line		
		Pipe	Velocity		Pipe	Velocity	
gal/min	m <sup>3</sup> /h	Size (in)	ft/s	m/s	Size (in)	ft/s	m/s
10	2.3	1	3.7	1.1	¾	6.0	1.8
100	22.7	2½	6.7	2.0	2	9.6	2.9
500	114	5	8.0	2.4	3½	16.2	4.9
2000	454	8	12.8	3.9	6	22.2	6.8

## Preporučene brzine protoka za specijalizirane sisteme

- Podaci sa prethodne slike se odnose na opću raspodjelu fluida u sistemima.
- Savjetuje se da se potraže druge informacije za koje se dizajnira protok fluida.
- Na primjer: preporučeni protok za fluid u elektroenergetskim sistemima je sljedeći

Type of Service	Recommended Range of Velocity	
	ft/s	m/s
Suction lines	2–4	0.6–1.2
Return lines	4–13	1.5–4.0
Discharge lines	7–25	2.1–7.6

- Usisni vod doprema fluid iz rezervoara do ulaska u pumpu.
- Ispusni vod nosi visokotlačni fluid od izlaza pumpe do rada komponente kao što su: aktuatori ili fluidni motori.
- Povratna linija prenosi fluid iz aktuatora, ventila za smanjenje pritiska ili tekućine motora natrag u rezervoar.

# Transformacija energije

- Iz fizike je poznato da se energija ne može uništiti niti nestati, ona se može samo transformisati iz jednog oblika u drugi.
- Postoje tri oblika energije koja se razmatraju kada se analizira problem tečenja u cijevima.

- Postoje tri oblika energije koja posjeduje element fluida:

- Potencijalna energija:

$$PE = wz$$

- Kinetička energija:

$$KE = wv^2/2g$$

- Energija toka ili energija pritiska:

$$FE = wp/\gamma$$

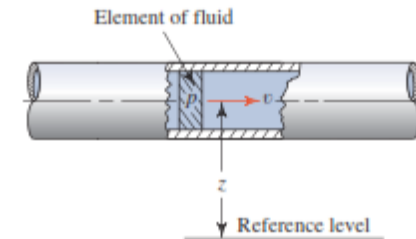
- Gdje je:

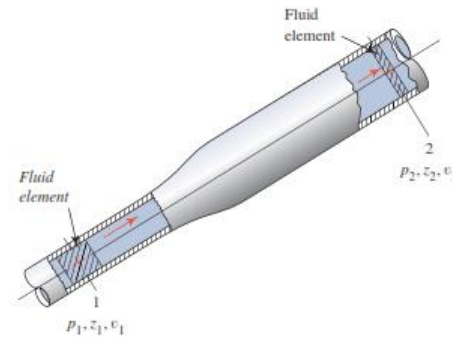
$$w = \gamma V$$

- Ukupna energija je jednaka sumi ova tri oblika energije:

$$E = FE + PE + KE$$

$$E = wp/\gamma + wz + wv^2/2g$$





➤ U presjeku 1 ukupna energija je:  $E_1 = \frac{wp_1}{\gamma} + wz_1 + \frac{wv_1^2}{2g}$

➤ U presjeku 2 ukupna energija je:  $E_2 = \frac{wp_2}{\gamma} + wz_2 + \frac{wv_2^2}{2g}$

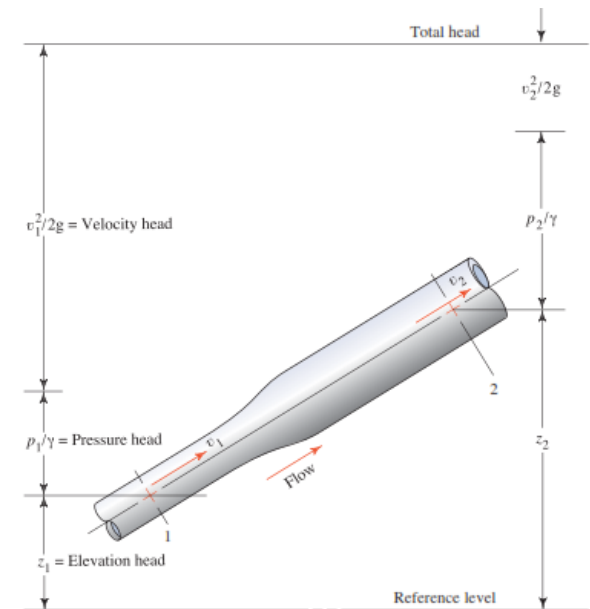
➤ Prema principu transformacije energije slijedi:  $E_1 = E_2$   
 $\frac{wp_1}{\gamma} + wz_1 + \frac{wv_1^2}{2g} = \frac{wp_2}{\gamma} + wz_2 + \frac{wv_2^2}{2g}$

➤ Sređujući gornji izraz dobiva se Bernulijeva jednačina:  $\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$

## Interpretacija Bernulijeve jednačine

- Svaki pojam u Bernoullijevoj jednačini jedan je od oblika energije koju posjeduje fluid po jedinici težine fluida koji teče u sistemu.
- Jedinica za svaki pojam je "energija po jedinici težine".
- U izrazu za Bernulijevu jednačinu razlikju se sljedeće visine:
  - Pritisna visina:  $p/\gamma$
  - Visina elevacije:  $z$
  - Brzinska visina:  $v^2/2g$
- Suma ove tri visine predstavlja ukupnu visinu.

- ✓ Bernoulijeva jednačina objašnjava promjene u visini pritiska, brzinskoj visini, te između dvije tačke u sistemu protoka fluida.
- ✓ Pretpostavlja se da između njih nema gubitaka ili dodatka u energiji, tako da ukupna visina ostaje konstantna.



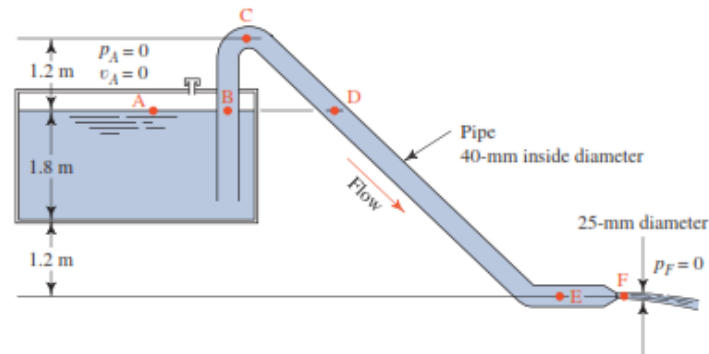
## Ograničenja kod primjene Bernulijeve jednačine

- Iako je Bernulijeva jednačina primjenjiva za rješavanje mnogih problema, postoji nekoliko ograničenja koja moraju biti dobro razumljiva kako bi se ista mogla primjenjivati pravilno:
  - Vrijedi samo za nekompresibilne fluide zato što se pretpostavlja da je specifična težina fluida kod bilo koje dva presjeka jednaka.
  - Između njih ne može postojati bilo koji uređaj koji može dodati ili ukloniti energiju iz sistema, budući da je prema jednačini energija u sistemu konstantna.
  - Nema prenosa toplote u ili iz fluida.
- U stvarnosti niti jedan sistem ne zadovoljava sva navedena ograničenja.
- Korištenje ovog oblika Bernulijeve jednačine je dopustivo samo ukoliko je potrebna brza gruba procjena.

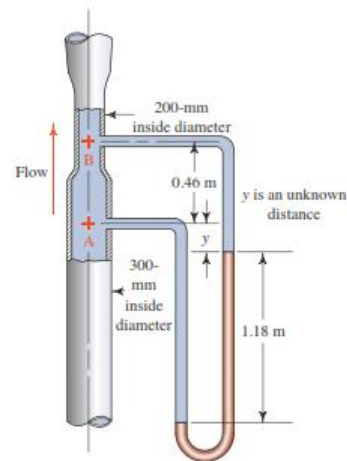
## Primjena Bernulijeve jednačine:

### ➤ Spremnici, rezervoari i mlaznice izložene atmosferi

- Kada je fluid izložen atmosferskom pritisku, pritisak je nula, te se može poništiti iz Bernulijeve jednačine;
- Brzina na površini rezervoara se uzima da je nula, te se može poništiti iz Bernulijeve jednačine;
- Kada su obje referentne tačke u istoj cijevi (B-E), tada je brzina u obje tačke ista te se može poništiti u Bernulijevoj jednačini;
- Kada su dvije referentne tačke na istom nivou (elevaciji), tada je elevacija u dvije tačke ista, te se može poništiti iz Bernulijeve jednačine;



## ➤ Venturi-metri i drugi zatvoreni sistemi sa nepoznatim brzinama



# Toričelijev teorem

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_1^0}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^0}{2g} = \frac{p_2^0}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$$

Stavljajući da je:

$$h = (z_1 - z_2)$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

