



Funded by
the European Union

Stabilnost linearnih sistema automatskog upravljanja

Edin Šemić

Univerzitet „Džemal Bijedić“ u Mostaru
Mašinski fakultet

Automatizacija / 26.03.2025.

"Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them."

**Partnership for Promotion and Popularization of Electrical Mobility through
Transformation and Modernization of WB HEIs Study Programs/PELMOB**

Call: ERASMUS-EDU-2022-CBHE-STRAND-2

Project Number: 101082860

POJAM STABILNOSTI SISTEMA AU

- **Pod stabilnim sistemom** se podrazumjeva sistem kod koga nakon početnog poremećaja dolazi do asimptotskog smirivanja procesa.
- Za sistem se kaže da je **stabilan** ako vrijedi da je:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_{pr}(t) = 0$$

- Sistem je **nestabilan** ili ograničeno stabilan ako vrijedi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_{pr}(t) \neq 0$$

VAŽNOST STABILNOSTI SISTEMA

- **Stabilnost sistema** u automatizaciji je ključna za pouzdano i efikasno funkcionisanje bilo kojeg tehnološkog sistema.
- Stabilnost direktno utiče na **performanse** automatizovanog sistema.
- U sistemima kao što su autonomna vozila, robotske ruke u industriji ili medicinski uređaji, **stabilnost je od presudne važnosti za bezbjednost.**
- Stabilnost omogućava da sistemi rade sa minimalnim gubicima energije, smanjenjem nesigurnih varijacija i nepotrebnih korekcija.



STABILNOST U INŽINJERSKIM SISTEMIMA

- U automatizovanim sistemima, kao što su robotske ruke, industrijski procesi, autonomna vozila i sl., stabilnost je potrebna kako bi sistem mogao sigurno i efikasno obavljati zadatke.
- U autonomnim vozilima, stabilnost je neophodna za sigurno upravljanje vozilom u promjenjivim uslovima vožnje, kao što je uspon, strmina, klizav put i sl.
- Korištenje teorije stabilnosti u automatskim upravljačkim sistemima omogućava inženjerima da projektuju sisteme koji mogu da riješe izazove u realnim uslovima.

KONTROLNI SISTEMI U ELEKTRIČNIM VOZILIMA

Kontrola ubrzanja

- U električnim vozilima, ubrzanje se kontroliše pomoću **električnog motora i sistema za upravljanje naponom**.
- **Sistem za kontrolu ubrzanja** upravlja izlaznom snagom motora tako što prilagođava jačinu struje koja ulazi u motor.
- **Algoritmi za kontrolu ubrzanja** obezbjeđuju da vozilo ubrzava ravnomjerno, bez iznenadnih skokova u brzini, što je važno za udobnost vožnje i sigurnost.

Kontrola kočenja

- **Električna kočnica** u EV-u, kao i **regenerativno kočenje**, koriste električni motor za usmjeravanje energije nazad u bateriju prilikom usporavanja.
- **Regenerativno kočenje** omogućava usmjeravanje kinetičke energije, koja bi se inače izgubila tokom kočenja, nazad u bateriju.
- **Kontrola kočenja** mora biti pažljivo usklađena, da vozilo ostane pod kontrolom i da ne dođe do gubitka stabilnosti.



ULOGA KONTROLNOG SISTEMA U ODRŽAVANJU STABILNOSTI VOZILA

- Kontrola stabilnosti pri promjenama brzine
 - Obuzdavanje prekomjernog ubrzavanja
- Kontrola stabilnosti pri klizavim uslovima
 - Kontrola trakcije, ABS sistemi
- Kontrola stabilnosti pri naglim promjenama pravca
 - Sistemi za upravljanje stabilnošću (ESP)
- Distribucija težine i upravljanje
 - EV često imaju povoljniju raspodjelu težine, što poboljšava stabilnost

ROUTH-OV KRITERIJ STABILNOSTI

- Posmatra se karakteristična jednačina sistema:

$$f(s) = a^n s^n + a^{n-1} s^{n-1} + \dots + a^1 s^1 + a^0 = 0$$

- Kod sistema višeg reda mora se primjeniti neki od kriterija za ispitivanje stabilnosti.
- Dva algebarska kriterija su, nezavisno jedan od drugog, postavili početkom XIX vijeka Routh i Hurwitz.
- Kriterij se postavlja sa ciljem da se odredi priroda rješenja karakteristične jednačine (predznak realnog dijela svih rješenja jednačine), bez rješavanja iste.

Routh-ov kriterij

- Posmatra se karakteristična jednačina.
- Na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma $f(s)$ se formira Routh-ova šema koeficijenata, prema sljedećoj tabeli:

$$\begin{array}{l|llll} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \vdots & & & & \\ s^0 & h_1 & & & \end{array}$$

Routh-ov kriterij

- Prva dva reda Routh-ove šeme koeficijenata se sastoje od koeficijenata karakterističnog polinoma.
- Ostali elementi, počevši od trećeg reda pa do kraja, računaju se na sljedeći način:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

⋮

Routh-ov kriterij

- Kada je šema formirana, posmatra se prva kolona – Routh-ova kolona.
- **Potreban i dovoljan uslov da bi sistem bio stabilan:**
 - Svi elementi Routh-ove kolone, formirane na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma, moraju biti istog znaka (najčešće pozitivan).
- Sistem će biti granično stabilan ako se u Routh-ovoj koloni pored koeficijenata istog znaka pojavljuju i nule.
- Sistem će biti nestabilan ako u Routh-ovoj koloni postoje pozitivni i negativni elementi.

Hurwitz-ov kriterij

- Na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma $f(s)$ formira se Hurwitz-ova determinanta koeficijenata, prema sljedećoj tabeli:

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

- **Sistem će biti stabilan** ako su svi dijagonalni minori Hurwitz-ove determinante, formirane na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma, veći od nule.

Hurwitz-ov kriterij

- Dakle, potrebni i dovoljni uslovi za stabilnost sistema, prema Hurwitz-u su:

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0$$

⋮

$$\Delta_n = \Delta_h.$$

Hurwitz-ov kriterij

- Sistem će biti **nestabilan** ako su neki dijagonalni minori pozitivni, a neki negativni.
- Sistem će biti **granično stabilan** ako je poslednji dijagonalni minor (Δ^h) jednak nuli, a svi prethodni pozitivni.

Primjer primjene Routhov-og i Hurwitz-ovog kriterija u stabilnosti kod električnih vozila

- Kontrola upravljanja motorom (torque control)
- Sistemi za regenerativno kočenje
- Kontrola distribucije snage između motora i baterije
- Sistemi za kontrolu stabilnosti vozila (ESC - Electronic Stability Control)
- Sistemi za autonomnu vožnju u električnim vozilima
- Kontrola suspenzije u električnim vozilima (aktivna suspenzija)
- ...



Program: ERASMUS-EDU-2022-CBHE-STRAND-2
Project number: 101082860



Funded by
the European Union

HVALA NA PAŽNJI!